2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷答案和评分参考

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 $\underline{\ y=x-1\ }$.

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=\underline{\ \frac{1}{2}(\ln x)^2\ }$.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为 $\underline{\ \frac{3}{2}\pi\ }$.

(4) 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为 $\underline{\ y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}\ }$.

(5) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$,其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,E 是单位矩阵,则 $|B|=\underline{\ \frac{1}{9}\ }$.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=\underline{\ \frac{1}{e}\ }$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.　[B]

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.　[C]

(9) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为正项级数. 下列结论中正确的是

(A) 若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

(B) 若存在非零常数λ,使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(C) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散,则存在非零常数λ,使得$\lim_{n\to\infty} na_n = \lambda$. 【 B 】

(10) 设$f(x)$为连续函数,$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)\,dx$,则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0. 【 B 】

(11) 设A是3阶方阵,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C,则满足$AQ = C$的可逆矩阵Q为

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

【 D 】

(12) 设A,B为满足$AB = O$的任意两个非零矩阵,则必有

(A) A的列向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(B) A的列向量组线性相关,B的列向量组线性相关.

(C) A的行向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(D) A的行向量组线性相关,B的列向量组线性相关. 【 A 】

(13) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$,对给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$,数u_α满足$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$. 若$P\{|X| < x\} = \alpha$,则$x$等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. 【 C 】

(14) 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n (n > 1)$独立同分布,且其方差为$\sigma^2 > 0$. 令$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$. (B) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$.

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$. (D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$. 【 A 】

2

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$,证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

证法 1 设 $\varphi(x) = \ln^2 x - \frac{4}{e^2}x$,则

$$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2},$$

$$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2},$$ ……5 分

所以当 $x > e$ 时,$\varphi''(x) < 0$,故 $\varphi'(x)$ 单调减少,从而当 $e < x < e^2$ 时,

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0,$$ ……9 分

即当 $e < x < e^2$ 时,$\varphi(x)$ 单调增加.

因此当 $e < a < b < e^2$ 时,

$$\varphi(b) > \varphi(a),$$

即 $\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a$,

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$. ……12 分

证法 2 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\ a < \xi < b.$$ ……3 分

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$,则 $\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$,

当 $t > e$ 时,$\varphi'(t) < 0$,所以 $\varphi(t)$ 单调减少, ……9 分

从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$,即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

故 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$. ……12 分

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行

3

的最长距离是多少?

注 kg 表示千克,km/h 表示千米/小时.

解 由题设,飞机的质量 $m=9000$ kg,着陆时的水平速度 $v_0=700$ km/h. 从飞机接触跑道开始计时,设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$,速度为 $v(t)$.

法 1 根据牛顿第二定律,得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv. \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

又
$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

由以上二式得

$$dx=-\frac{m}{k}dv, \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$. 由于 $v(0)=v_0, x(0)=0$,故得 $C=\frac{m}{k}v_0$,从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当 $v(t)\to 0$ 时,

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6}=1.05(\text{km}). \qquad \cdots\cdots 11\text{ 分}$$

所以,飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

法 2 根据牛顿第二定律,得 $m\frac{dv}{dt}=-kv$, ……4 分

所以
$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt.$$

两端积分得通解 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$,代入初始条件 $v|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$,

故
$$v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(\text{km}). \qquad \cdots\cdots 11\text{ 分}$$

法 3 根据牛顿第二定律,得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0, \qquad \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

其特征方程为 $r^2+\frac{k}{m}r=0$,解之得 $r_1=0, r_2=-\frac{k}{m}$,

故
$$x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

4

由 $x|_{t=0}=0$, $v|_{t=0}=\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}|_{t=0}=v_0$,

得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$,

于是 $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

当 $t\to+\infty$ 时, $x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$. ……11 分

所以,飞机滑行的最长距离为 1.05km.

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

解 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧,记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域,则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$-\iint_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ ……3 分

由高斯公式知

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ ……6 分

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\mathrm{d}z$$

$$=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)\right]\mathrm{d}r$$

$$=2\pi,$$ ……9 分

而 $$\iint_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$$

因此 $I=2\pi-3\pi=-\pi$. ……12 分

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n+nx-1=0$,其中 n 为正整数.证明此方程存在惟一正实根 x_n,并证明当

5

$\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

证 记 $f_n(x) = x^n + nx - 1$.

当 $x > 0$ 时，$f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0$，

故 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. ……3 分

而 $f_n(0) = -1 < 0$，$f_n(1) = n > 0$，由连续函数的介值定理知

$x^n + nx - 1 = 0$ 存在惟一正实根 x_n. ……6 分

由 $x_n^n + nx_n - 1 = 0$ 与 $x_n > 0$ 知

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n},$$

故当 $\alpha > 1$ 时，$0 < x_n^{\alpha} < \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$. ……9 分

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ 收敛，

所以当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛. ……11 分

(19)（本题满分 12 分）

设 $z = z(x,y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数，求 $z = z(x,y)$ 的极值点和极值.

解 因为 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$，

所以
$$2x - 6y - 2y\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-6x + 20y - 2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$ ……2 分

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -3x + 10y - z = 0, \end{cases}$

故 $\begin{cases} x = 3y, \\ z = y. \end{cases}$

将上式代入 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$，可得

$$\begin{cases} x = 9, \\ y = 3, \\ z = 3 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x = -9, \\ y = -3, \\ z = -3. \end{cases}$$ ……5 分

由于 $2 - 2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$，

6

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

……8 分

所以 $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6}$, $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2}$, $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$,

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，所以点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

……12 分

(20)（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad (n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解法 1 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ & \cdots\cdots & & & \\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots\cdots & & & \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数. ……4 分

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

7