2004 年数学一试题分析、详解和评注

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

（1）曲线 y=lnx 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 $\underline{y=x-1}$.

【分析】 本题为基础题型，相当于已知切线的斜率为 1，由曲线 y=lnx 的导数为 1 可确定切点的坐标。

【详解】 由 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$，得 x=1, 可见切点为 $(1,0)$，于是所求的切线方程为

$$y-0=1\cdot(x-1)，\quad 即 \quad y=x-1.$$

【评注】 本题也可先设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，曲线 y=lnx 过此切点的导数为 $y'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}=1$，得 $x_0=1$，由此可知所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$， 即 $y=x-1$.

本题比较简单，类似例题在一般教科书上均可找到.

（2）已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 f(1)=0, 则 f(x)= $\underline{\dfrac{1}{2}(\ln x)^2}$.

【分析】 先求出 $f'(x)$ 的表达式，再积分即可。

【详解】 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，于是有

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t}，\quad 即 \quad f'(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

积分得 $f(x)=\int\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$. 利用初始条件 f(1)=0, 得 C=0，故所求函数为 f(x)= $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

【评注】 本题属基础题型，已知导函数求原函数一般用不定积分。

完全类似的例题见《数学复习指南》P89 第 8 题, P90 第 11 题.

（3）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为 $\underline{\dfrac{3}{2}\pi}$.

【分析】 利用极坐标将曲线用参数方程表示，相应曲线积分可化为定积分。

【详解】 正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]d\theta$$

$$=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

【评注】 本题也可添加直线段，使之成为封闭曲线，然后用格林公式计算，而在添加的线段上用参数法化为定积分计算即可.

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P143 例 10.11，《考研数学大串讲》P122 例 5、例 7 .

（4）欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为 $\underline{y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}}$.

【分析】 欧拉方程的求解有固定方法，作变量代换 $x=e^t$ 化为常系数线性齐次微分方程即可。

【详解】 令 $x=e^t$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}],$$

代入原方程，整理得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0,$$

解此方程，得通解为 $y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}.$

【评注】 本题属基础题型，也可直接套用公式，令 $x=e^t$，则欧拉方程

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=f(x),$$

可化为 $a[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]+b\frac{dy}{dt}+cy=f(e^t).$

完全类似的例题见《数学复习指南》P171 例 6.19, 《数学题型集粹与练习题集》P342 第六题.,《考研数学大串讲》P75 例 12.

（5）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=\underline{\frac{1}{9}}$.

【分析】 可先用公式 $A^*A=|A|E$ 进行化简

【详解】 已知等式两边同时右乘 A，得

$ABA^*A=2BA^*A+A$， 而 $|A|=3$，于是有

$3AB=6B+A$， 即 $(3A-6E)B=A$，

再两边取行列式，有 $|3A-6E||B|=|A|=3$，

而 $|3A-6E|=27$，故所求行列式为 $|B|=\frac{1}{9}.$

【评注】 先化简再计算是此类问题求解的特点，而题设含有伴随矩阵 A^*，一般均应先利用公式 $A^*A = AA^* = |A|E$ 进行化简。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P107 例 2，P118 例 9

（**6**）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ $\underline{\dfrac{1}{e}}$.

【分析】 已知连续型随机变量 X 的分布，求其满足一定条件的概率，转化为定积分计算即可。

【详解】 由题设，知 $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$，于是

$$P\{X > \sqrt{DX}\} = P\{X > \frac{1}{\lambda}\} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= - e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty} = \frac{1}{e}.$$

【评注】 本题应记住常见指数分布等的期望与方差的数字特征，而不应在考试时再去推算。

完全类似例题见《数学一临考演习》P35 第 5 题.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（**7**）把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α, β, γ.　(B) α, γ, β.　(C) β, α, γ.　(D) β, γ, α.　　　[B]

【分析】 先两两进行比较，再排出次序即可.

【详解】 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x \cdot 2x}{\cos x^2} = 0$，可排除(C),(D)选项，

又
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\gamma}{\beta} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t} dt} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x \tan x}$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2} = \infty$$，可见 γ 是比 β 低阶的无穷小量，故应选(B).

【评注】 本题是无穷小量的比较问题，也可先将 α, β, γ 分别与 x^n 进行比较，再确定相互的高低次序.

完全类似例题见《数学一临考演习》P28 第 9 题.

（**8**）设函数 f(x)连续，且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$，使得

(A)　f(x)在（0，δ) 内单调增加.　　　（B）f(x)在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0,\delta)$ 有 f(x)>f(0) .　　　(D) 对任意的 $x \in (-\delta,0)$ 有 f(x)>f(0) .

[C]

【分析】 函数 f(x)只在一点的导数大于零，一般不能推导出单调性，因此可排除(A),(B)选项，再利用导数的定义及极限的保号性进行分析即可。

【详解】 由导数的定义，知

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 0,$$

根据保号性，知存在 $\delta > 0$，当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时，有

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$

即当 $x \in (-\delta, 0)$ 时，f(x)<f(0); 而当 $x \in (0, \delta)$ 时，有 f(x)>f(0). 故应选(C).

【评注】 题设函数一点可导，一般均应联想到用导数的定义进行讨论。

完全类似例题见《数学一临考演习》P28 第 10 题.

（**9**）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n \to \infty} n a_n$=0，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

（B） 若存在非零常数 λ，使得 $\lim_{n \to \infty} n a_n = \lambda$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = 0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ，使得 $\lim_{n \to \infty} n a_n = \lambda$.　　[B]

【分析】 对于敛散性的判定问题，若不便直接推证，往往可用反例通过排除法找到正确选项.

【详解】 取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$，则 $\lim_{n \to \infty} n a_n$=0，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散，排除(A)，(D);

又取 $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\lim_{n \to \infty} n^2 a_n = \infty$，排除(C), 故应选(B).

【评注】 本题也可用比较判别法的极限形式，

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lambda \neq 0，而级数 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 发散，因此级数 \sum_{n=1}^{\infty} a_n 也发散，故应选(B).$$

完全类似的例题见《数学复习指南》P213 例 8.13.

（**10**）设 f(x)为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于

(A)　2f(2).　　(B)　f(2).　　(C)　–f(2).　　(D)　0.　　　　[　B　]

【分析】 先求导，再代入 t=2 求$F'(2)$即可。关键是求导前应先交换积分次序，使得被积函数中不含有变量 t.

【详解】 交换积分次序，得

$$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t[\int_1^x f(x)dy]dx=\int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$，故应选(B).

【评注】 在应用变限的积分对变量 x 求导时，应注意被积函数中不能含有变量 x:

$$[\int_{a(x)}^{b(x)}f(t)dt]'=f[b(x)]b'(x)-f[a(x)]a'(x)$$

否则，应先通过恒等变形、变量代换和交换积分次序等将被积函数中的变量 x 换到积分号外或积分线上。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P184 例 12，先交换积分次序再求导.

（**11**）设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B,再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C, 则满足 AQ=C 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

[　D　]

【分析】 本题考查初等矩阵的的概念与性质，对 A 作两次初等列变换，相当于右乘两个相应的初等矩阵，而 Q 即为此两个初等矩阵的乘积。

【详解】由题设，有

$$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B,\quad B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=C,$$

于是，
$$A\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=C.$$

可见，应选(D).

【评注】 涉及到初等变换的问题，应掌握初等矩阵的定义、初等矩阵的性质以及与初等变换的关系。

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P196 例 2.2

（**12**）设 A,B 为满足 AB=O 的任意两个非零矩阵，则必有

(A)　A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(B)　A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

(C)　A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

(D)　A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.　　　　[　A　]

【分析】A,B 的行列向量组是否线性相关，可从 A,B 是否行（或列）满秩或 Ax=0（Bx=0）是否有非零解进行分析讨论.

【详解 1】 设 A 为$m\times n$矩阵，B 为$n\times s$矩阵，则由 AB=O 知，

$$r(A)+r(B)<n.$$

又 A,B 为非零矩阵，必有 r(A)>0,r(B)>0. 可见 r(A)<n, r(B)<n, 即 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【详解 2】 由 AB=O 知，B 的每一列均为 Ax=0 的解，而 B 为非零矩阵，即 Ax=0 存在非零解，可见 A 的列向量组线性相关。

同理，由 AB=O 知，$B^T A^T = O$，于是有 B^T 的列向量组，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

【评注】 AB=O 是常考关系式，一般来说，与此相关的两个结论是应记住的：

1） AB=O$\Rightarrow r(A)+r(B)<n$；

2） AB=O$\Rightarrow$B 的每列均为 Ax=0 的解。

完全类似例题见《数学最后冲刺》P110 例 10-11，《数学一临考演习》P79 第 4 题,〈考研数学大串讲〉P173 例 8, P184 例 27。

（**13**）设随机变量 X 服从正态分布 N(0,1)，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. [C]

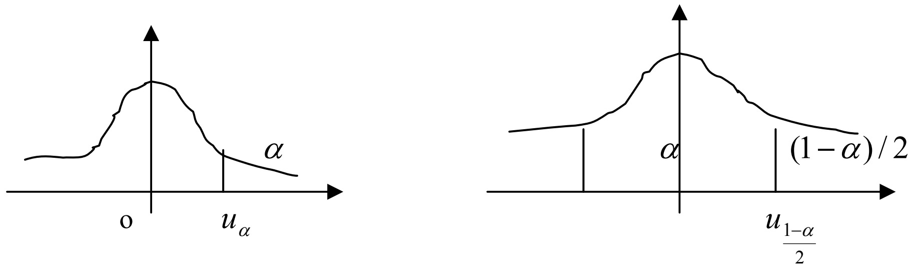
【分析】 此类问题的求解，可通过u_α的定义进行分析，也可通过画出草图，直观地得到结论。

【详解】 由标准正态分布概率密度函数的对称性知，$P\{X<-u_\alpha\}=\alpha$，于是

$$1-\alpha=1-P\{|X|<x\}=P\{|X|\ge x\}=P\{X\ge x\}+P\{X\le -x\}=2P\{X\ge x\}$$

即有 $P\{X\ge x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，可见根据定义有$x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，故应选(C).

【评注】 本题u_α相当于分位数，直观地有



此类问题在文登学校的辅导班上作为正态分布的一般结论总结过.

（**14**）设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布，且其方差为$\sigma^2>0$. 令$Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$. (B) $Cov(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　　[A]

【分析】 本题用方差和协方差的运算性质直接计算即可，注意利用独立性有：$Cov(X_1,X_i)=0, i=2,3,\cdots n.$

【详解】 $\text{Cov}(X_1,Y)=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Cov(X_1,X_i)$

$$=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

【评注】 本题(C),(D) 两个选项的方差也可直接计算得到：如

$$D(X_1+Y)=D(\frac{1+n}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n)=\frac{(1+n)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2+3n}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2,$$

$$D(X_1-Y)=D(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2$$

$$=\frac{n^2-2n}{n^2}\sigma^2=\frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

完全类似的例题见《数学一临考演习》P78 第 23 题（本题是第 23 题的特殊情况）.

（15）（本题满分 12 分）

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【分析】 根据要证不等式的形式，可考虑用拉格朗日中值定理或转化为函数不等式用单调性证明.

【证法 1】 对函数 $\ln^2 x$ 在[a,b]上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a), a<\xi<b.$$

设 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，

当 t>e 时， $\varphi'(t)<0,$ 所以 $\varphi(t)$ 单调减少，从而 $\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2},$$

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

【证法 2】 设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\frac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2},$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当 x>e 时，$\varphi''(x)<0$, 故$\varphi'(x)$单调减少，从而当$e<x<e^2$时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此当$e<x<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，

即 $$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a,$$

故 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

【评注】 本题也可设辅助函数为$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{e^2}(x-a), e<a<x<e^2$或

$\varphi(x)=\ln^2 b-\ln^2 x-\frac{4}{e^2}(b-x), e<x<b<e^2$，再用单调性进行证明即可。

完全类似的例题见《数学复习指南》P347 例 13.31 及 P344 的[解题提示],《考研数学大串讲》P65 例 13.

（16）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为$k=6.0\times10^6$）. 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

注 kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.

【分析】 本题是标准的牛顿第二定理的应用，列出关系式后再解微分方程即可。

【详解 1】 由题设，飞机的质量 m=9000kg，着陆时的水平速度$v_0=700km/h$. 从飞机接触跑道开始记时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 x(t)，速度为 v(t).

根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

又 $$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

由以上两式得

$$dx=-\frac{m}{k}dv,$$

积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C.$ 由于$v(0)=v_0, x(0)=0$，故得$C=\frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当$v(t)\to 0$时， $x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^6}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

【详解 2】 根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{dv}{dt}=-kv$,

所以 $\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{k}{m}dt.$

两端积分得通解 $v=Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0}=v_0$ 解得 $C=v_0$，

故 $v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$

飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05(km).$$

或由 $\dfrac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t)=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt=-\dfrac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t}-1)$，故最长距离为当 $t\to\infty$ 时，

$x(t)\to\dfrac{kv_0}{m}=1.05(km).$

【详解 3】 根据牛顿第二定律，得 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-k\dfrac{dx}{dt}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0,$$

其特征方程为 $\lambda^2+\dfrac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-\dfrac{k}{m}$,

故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}.$

由 $x\Big|_{t=0}=0, v\Big|_{t=0}=\dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\dfrac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$,

得 $C_1=-C_2=\dfrac{mv_0}{k}$, 于是 $x(t)=\dfrac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$

当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\dfrac{mv_0}{k}=1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

【评注】 本题求飞机滑行的最长距离，可理解为 $t\to+\infty$ 或 $v(t)\to0$ 的极限值，这种条件应引起注意.

完全类似的例题见《数学最后冲刺》P98-99 例 10-11.

（17）（本题满分 12 分）

计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中$\sum$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$的上侧.

【分析】 先添加一曲面使之与原曲面围成一封闭曲面，应用高斯公式求解，而在添加的曲面上应用直接投影法求解即可.

【详解】 取$\sum_1$为 xoy 平面上被圆$x^2+y^2=1$所围部分的下侧，记Ω为由$\sum$与$\sum_1$围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$
$$-\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy.$$

由高斯公式知

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)dxdydz$$
$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz$$
$$=12\pi\int_0^1[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)]dr=2\pi.$$

而　$$\iint\limits_{\Sigma_1} 2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}-3dxdy=3\pi,$$

故　$I=2\pi-3\pi=-\pi.$

【评注】 本题选择$\sum_1$时应注意其侧与$\sum$围成封闭曲面后同为外侧（或内侧），再就是在$\sum_1$上直接投影积分时，应注意符号($\sum_1$取下侧，与 z 轴正向相反，所以取负号).

完全类似的例题见《数学复习指南》P325 例 12.21，《数学题型集粹与练习题集》P148 例 10.17（2），《数学一临考演习》P38 第 19 题.

（18）（本题满分 11 分）

设有方程$x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根x_n，并证明当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$收敛.

【分析】 利用介值定理证明存在性，利用单调性证明惟一性。而正项级数的敛散性可用比较法判定。

【证】 记　$f_n(x)=x^n+nx-1$. 由$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n>0$，及连续函数的介值定理知，方程$x^n+nx-1=0$存在正实数根$x_n\in(0,1)$.

当 x>0 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，可见$f_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调增加, 故方程$x^n+nx-1=0$存在惟一正实数根x_n.

由$x^n+nx-1=0$与$x_n>0$知

$$0 < x_n = \frac{1-x_n^n}{n} < \frac{1}{n}，故当\alpha > 1时，0 < x_n^\alpha < (\frac{1}{n})^\alpha.$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛，所以当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

【评注】 本题综合考查了介值定理和无穷级数的敛散性，题型设计比较新颖，但难度并不大，只要基本概念清楚，应该可以轻松求证。

完全类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P91 例 6.15(有关根的存在性与惟一性证明), 收敛性证明用比较法很简单.

（19）（本题满分 12 分）

设 z=z(x,y)是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

【分析】 可能极值点是两个一阶偏导数为零的点，先求出一阶偏导，再令其为零确定极值点即可，然后用二阶偏导确定是极大值还是极小值，并求出相应的极值.

【详解】 因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以

$$2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$

故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

由于 $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，

故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点(9,3)是 z(x,y)的极小值点，极小值为 z(9,3)=3.

类似地，由

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，从而点(-9, -3)是 z(x,y)的极大值点，极大值为 z(-9, -3)= -3.

【评注】 本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题，关键是求可能极值点时应注意 x,y,z 满足原方程。

完全类似的例题见《数学复习指南》P277 例 10.31.

（20）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad (n\ge 2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

【分析】 本题是方程的个数与未知量的个数相同的齐次线性方程组，可考虑对系数矩阵直接用初等行变换化为阶梯形，再讨论其秩是否小于 n，进而判断是否有非零解；或直接计算系数矩阵的行列式，根据题设行列式的值必为零，由此对参数 a 的可能取值进行讨论即可。

【详解 1】 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=B.$$

当 a=0 时，　r(A)=1<n，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\ \ \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B \to \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta=(1,2,\cdots,n)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

【详解 2】 方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}=(a+\frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}.$$

当 $|A|=0$，即 a=0 或 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 a=0 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta=(1,2,\cdots,n)^T,$$

于是方程组的通解为

$x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

【评注】 矩阵 A 的行列式$|A|$也可这样计算：

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}=aE+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}$$，矩阵$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}$的特征值为$0,\cdots,0,\dfrac{n(n+1)}{2}$，从而 A 的特征值为 $a,a,\cdots,a+\dfrac{n(n+1)}{2}$，故行列式$|A|=(a+\dfrac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$.

类似例题见《数学题型集粹与练习题集》P228 例 4.4 和 P234 例 4.12.

（21）（本题满分 9 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【分析】 先求出 A 的特征值，再根据其二重根是否有两个线性无关的特征向量，确定 A 是否可相似对角化即可.

【详解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -(\lambda-2) & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

当 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$, 解得 a= -2.

当 a= -2 时，A 的特征值为 2,2,6, 矩阵 2E-A= $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$ 的秩为 1，故 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有两个，从而 A 可相似对角化。

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 18+3a=16，解得 $a=-\dfrac{2}{3}$.

当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，A 的特征值为 2，4，4，矩阵 4E-A= $\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1\end{bmatrix}$ 秩为 2，故 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个，从而 A 不可相似对角化。

【评注】 n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是：对于 A 的任意 k_i 重特征根 λ_i，恒有 $n-r(\lambda_i E-A)=k_i$. 而单根一定只有一个线性无关的特征向量。

原题见《考研数学大串讲》P224 例 20.，完全类似的例题还可参见《数学复习指南》P462 例 5.12 及[解题提示].

(22)（**本题满分 9 分**）

设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求：(I) 二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

【分析】 先确定(X,Y)的可能取值，再求在每一个可能取值点上的概率，而这可利用随机事件的运算性质得到，即得二维随机变量(X,Y)的概率分布；利用联合概率分布可求出边缘概率分布，进而可计算出相关系数。

【详解】 (I) 由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{12}$，

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6},$$

所以， $P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\dfrac{1}{12}$,

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\dfrac{1}{6}$,

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A+B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

（或$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$），

故(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II)　X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则$EX=\frac{1}{4},EY=\frac{1}{6}$，$DX=\frac{3}{16}$，DY=$\frac{5}{36}$, E(XY)=$\frac{1}{12}$,

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

【评注】 本题尽管难度不大，但考察的知识点很多，综合性较强。通过随机事件定义随机变量或通过随机变量定义随机事件，可以比较好地将概率论的知识前后连贯起来，这种命题方式值得注意。

原题见《考研数学大串讲》P274 例 3.

（23）（本题满分 9 分）

设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数$\beta>1, X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体 X 的简单随机样本，求：

（I）　β的矩估计量；

（II）　β的最大似然估计量.

【分析】 先由分布函数求出概率密度，再根据求矩估计量和最大似然估计量的标准方法进行讨论即可。

【详解】 X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$$

（I） 由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1},$$

令 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}.$$

（II）似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

两边对 β 求导，得

$$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\dfrac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$，可得 $\beta=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

故 β 的最大似然估计量为

$$\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

【评注】 本题是基础题型，难度不大，但计算量比较大，实际做题时应特别注意计算的准确性。

完全类似的例题见《数学复习指南》P596 例 6.9, 《数学题型集粹与练习题集》P364 第十三题，《数学一临考演习》P26 第 23 题.