绝密★启用前

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)试卷答案和评分参考

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$,则$f(x)$的间断点为$x=$ $\underline{\ 0\ }$.

(2) 设函数$y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1,\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$确定,则曲线$y=y(x)$向上凸的$x$取值范围为 $\underline{(-\infty,1)\ \ (或\ \ (-\infty,1]\ )}$.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=$ $\underline{\ \dfrac{\pi}{2}\ }$.

(4) 设函数$z=z(x,y)$由方程$z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$确定,则$3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\ 2\ }$.

(5) 微分方程$(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$满足$y\Big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$的特解为 $\underline{\ y=\dfrac{1}{5}x^3+\sqrt{x}\ }$.

(6) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$,其中$A^*$为$A$的伴随矩阵,$E$是单位矩阵,则$|B|=$ $\underline{\ \dfrac{1}{9}\ }$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把$x\to0^+$时的无穷小量$\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t$,$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$,$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.　【 B 】

(8) 设$f(x)=|x(1-x)|$,则

(A) $x=0$是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$不是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$是$f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$不是$f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点.　【 C 】

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$.　　(B) $2\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$.

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x$.　　【 B 】

(10) 设函数$f(x)$连续,且$f'(0)>0$,则存在$\delta>0$,使得

(A) $f(x)$在$(0,\delta)$内单调增加.

(B) $f(x)$在$(-\delta,0)$内单调减少.

(C) 对任意的$x\in(0,\delta)$有$f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的$x\in(-\delta,0)$有$f(x)>f(0)$.　　【 C 】

(11) 微分方程$y''+y=x^2+1+\sin x$的特解形式可设为

(A) $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

(B) $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

(C) $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

(D) $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.　　【 A 】

(12) 设函数$f(u)$连续,区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,则$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于

(A) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$.　　(B) $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$.

(C) $\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}r$.　　(D) $\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$.　　【 D 】

(13) 设A是3阶方阵,将A的第1列与第2列交换得B,再把B的第2列加到第3列得C,则满足$AQ=C$的可逆矩阵Q为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【 D 】

(14) 设A,B为满足$AB=O$的任意两个非零矩阵,则必有

(A) A的列向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(B) A的列向量组线性相关,B的列向量组线性相关.

(C) A的行向量组线性相关,B的行向量组线性相关.

(D) A的行向量组线性相关,B的列向量组线性相关.　　【 A 】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解法 1 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$ ……3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$ ……6 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$ ……9 分

$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$. ……10 分

解法 2 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$ ……3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$ ……6 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$ ……8 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$. ……10 分

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,在区间 $[0,2]$ 上,$f(x)=x(x^2-4)$,若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$,其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式;

(Ⅱ)问 k 为何值时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解 (Ⅰ)当 $-2\leqslant x<0$,即 $0\leqslant x+2<2$ 时,

$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4)$. ……3 分

(Ⅱ)由题设知 $f(0)=0$. ……4 分

3

$$f_{+}'(0)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{x(x^{2}-4)}{x}=-4,$$ ……6 分

$$f_{-}'(0)=\lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$ ……8 分

令 $f_{-}'(0)=f_{+}'(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$.

即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. ……10 分

(17)（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|\,dt$，

（Ⅰ）证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的值域.

解 （Ⅰ）$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}|\sin t|\,dt$， ……2 分

设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|\,du=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|\,du=f(x),$$ ……5 分

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

（Ⅱ）因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，注意到 $f(x)$ 的周期为 π，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域. 因为

$$f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$ ……7 分

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，且 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2}$，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,dt$

$$=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,dt=2-\sqrt{2},$$

又 $f(0)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=1$，

因而 $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. ……11 分

4

(18)(本题满分 12 分)

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体,其体积为 $V(t)$,侧面积为 $S(t)$,在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

解 (Ⅰ) $S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ ……2 分

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx,$$ ……4 分

$$V(t)=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx,$$ ……6 分

所以 $\dfrac{S(t)}{V(t)}=2.$ ……7 分

(Ⅱ) $F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2,$ ……8 分

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}$$ ……11 分

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1.$$ ……12 分

(19)(本题满分 12 分)

设 $e<a<b<e^2$,证明 $\ln^2b-\ln^2a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

证法 1 设 $\varphi(x)=\ln^2x-\dfrac{4}{e^2}x$,则

5

$$\varphi'(x) = 2\frac{\ln x}{x} - \frac{4}{e^2},$$

$$\varphi''(x) = 2\frac{1-\ln x}{x^2},$$ ……5 分

所以当 $x > e$ 时,$\varphi''(x) < 0$,故 $\varphi'(x)$ 单调减少,从而当 $e < x < e^2$ 时,

$$\varphi'(x) > \varphi'(e^2) = \frac{4}{e^2} - \frac{4}{e^2} = 0,$$ ……9 分

即当 $e < x < e^2$ 时,$\varphi(x)$ 单调增加.

因此当 $e < a < b < e^2$ 时,

$$\varphi(b) > \varphi(a),$$

即 $$\ln^2 b - \frac{4}{e^2}b > \ln^2 a - \frac{4}{e^2}a,$$

故 $$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$ ……12 分

证法2 对函数 $\ln^2 x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\ln^2 b - \ln^2 a = \frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\ a < \xi < b.$$ ……3 分

设 $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$, 则 $\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$,

当 $t > e$ 时,$\varphi'(t) < 0$,所以 $\varphi(t)$ 单调减少, ……9 分

从而 $\varphi(\xi) > \varphi(e^2)$,即

$$\frac{\ln\xi}{\xi} > \frac{\ln e^2}{e^2} = \frac{2}{e^2},$$

故 $$\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a).$$ ……12 分

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0\times10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

6

注 kg 表示千克，km/h 表示千米／小时.

解 由题设，飞机的质量 $m = 9000$ kg，着陆时的水平速度 $v_0 = 700$ km/h. 从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

法 1 根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

又 $$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

由以上二式得

$$dx = -\frac{m}{k}dv, \qquad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

积分得 $x(t) = -\frac{m}{k}v + C$. 由于 $v(0) = v_0$, $x(0) = 0$，故得 $C = \frac{m}{k}v_0$，从而

$$x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t)).$$

当 $v(t) \to 0$ 时，

$$x(t) \to \frac{mv_0}{k} = \frac{9000\times 700}{6.0\times 10^6} = 1.05(\text{km}). \qquad \cdots\cdots 11 \text{ 分}$$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 km.

法 2 根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$， ……4 分

所以 $$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$$

两端积分得通解 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v|_{t=0} = v_0$ 解得 $C = v_0$，

故 $$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

飞机滑行的最长距离为

$$x = \int_0^{+\infty} v(t)dt = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(\text{km}). \qquad \cdots\cdots 11 \text{ 分}$$

法 3 根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

7

其特征方程为 $r^2+\frac{k}{m}r=0$，解之得 $r_1=0, r_2=-\frac{k}{m}$，

故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$. ……7 分

由 $x|_{t=0}=0,\ v|_{t=0}=\frac{dx}{dt}|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}|_{t=0}=v_0$，

得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$，

于是 $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05(\mathrm{km})$. ……11 分

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05km.

(21)（本题满分 10 分）

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$， ……3 分

$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$， ……5 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot xe^{xy}]+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+ye^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot xe^{xy}]$$

$$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''+xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f_2'.$$ ……10 分

(22)（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

8

解法1 对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$ ……2 分

当 $a=0$ 时,$r(A)=1<4$,故方程组有非零解,其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_3=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}},$$ ……4 分

于是所求方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数. ……5 分

当 $a\neq0$ 时,

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+10&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix},$$ ……6 分

可知 $a=-10$ 时,$r(A)=3<4$,故方程组也有非零解,其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\-4x_1+x_4=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},$$ ……8 分

于是所求方程组的通解为

$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\eta}$,其中 k 为任意常数. ……9 分

解法2 方程组的系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$ ……3 分

9

当 $|A|=0$,即 $a=0$ 或 $a=-10$ 时,方程组有非零解.

当 $a=0$ 时,对系数矩阵 A 作初等行变换,有

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

其基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,0)^T,\eta_2=(-1,0,1,0)^T,\eta_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数. ……6 分

当 $a=-10$ 时,对 A 作初等行变换,有

$$A=\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\4&4&4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\20&-10&0&0\\30&0&-10&0\\40&0&0&-10\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_2=2x_1,\\x_3=3x_1,\\x_4=4x_1,\end{cases}$$

其基础解系为 $\eta=(1,2,3,4)^T$,

于是所求方程组的通解为 $x=k\eta$,其中 k 为任意常数. ……9 分

10