2004 年考硕数学（二）真题评注

一. 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上. ）

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ <u>0</u> .

【分析】本题属于确定由极限定义的函数的连续性与间断点. 对不同的 x, 先用求极限的方法得出 $f(x)$ 的表达式, 再讨论 $f(x)$ 的间断点.

【详解】显然当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；

当 $x\neq 0$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\frac{1}{n})x}{x^2+\frac{1}{n}}=\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$,

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0\end{cases}$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty\neq f(0)$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的间断点.

【评注】本题为常规题型, 类似例题见《题型集粹与练习题集》P21【例 1. 36】

（2）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+3t+1\\ y=t^3-3t+1\end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 <u>$(-\infty,1)$（或 $(-\infty,1]$ ）</u> .

【分析】判别由参数方程定义的曲线的凹凸性，先用由 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$

定义的 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$ 求出二阶导数, 再由 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ 确定 x 的取值范围.

【详解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-3}{3t^2+3}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=1-\dfrac{2}{t^2+1}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left(1-\frac{2}{t^2+1}\right)'\cdot\frac{1}{3(t^2+1)}=\frac{4t}{3(t^2+1)^3},$$

令 $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0 \Rightarrow \quad t<0$.

又 $x=t^3+3t+1$ 单调增，在 $t<0$ 时，$x\in(-\infty,1)$。($\because$ $t=0$ 时，$x=1 \Rightarrow x\in(-\infty,1]$ 时，曲线凸.)

【评注】本题属新题型.已考过的题型有求参数方程所确定的函数的二阶导数，如 1989、1991、1994、2003 数二考题，也考过函数的凹凸性.关于参数方程求二阶导数是文登考研辅导班强调的重点，类似例题见《数学复习指南》P53 一般方法及**【例 2.9】**和《临考演习》P86**【题（10）】**.

（3）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$ $\underline{\quad\frac{\pi}{2}\quad}$.

【分析】利用变量代换法和形式上的牛顿莱布尼兹公式可得所求的广义积分值.

【详解 1】 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\sec t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot\tan t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$.

【详解 2】 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=}\int_1^0\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}(-\frac{1}{t^2})dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\arcsin t\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

【评注】本题为混合广义积分的基本计算题,主要考查广义积分(或定积分)的换元积分法,完全类似的例题见《数学复习指南》P130-131**【例 4.54】**.

（4）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

【分析】此题可利用复合函数求偏导法、公式法或全微分公式求解.

【详解 1】在 $z=e^{2x-3z}+2y$ 的两边分别对 x，y 求偏导，z 为 x,y 的函数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}(2-3\frac{\partial z}{\partial x}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}(-3\frac{\partial z}{\partial y})+2,$$

从而
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

所以
$$3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\cdot\frac{1+e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}=2$$

【详解 2】令 $F(x,y,z)=e^{2x-3z}+2y-z=0$

则 $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{2x-3z}\cdot 2$，$\frac{\partial F}{\partial y}=2$，$\frac{\partial F}{\partial z}=e^{2x-3z}(-3)-1$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{e^{2x-3z}\cdot 2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2}{-(1+3e^{2x-3z})}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}},$$

从而 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2\left(\frac{3e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}+\frac{1}{1+3e^{2x-3z}}\right)=2$

【详解 3】利用全微分公式,得

$$dz=e^{2x-3z}(2dx-3dz)+2dy$$

$$=2e^{2x-3z}dx+2dy-3e^{2x-3z}dz$$

$$(1+3e^{2x-3z})dz=2e^{2x-3z}dx+2dy$$

$$\therefore\ dz=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}dx+\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}dy$$

即 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$

从而 $3\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2$

【评注】此题属于典型的隐函数求偏导. 相似的例题见《数学复习指南》P282**【习题十第 2,4 题】**.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}$ 的特解为 $\underline{\quad y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}\quad}$.

【分析】此题为一阶线性方程的初值问题. 可以利用常数变易法或公式法求出方程的通解, 再利用初值条件确定通解中的任意常数而得特解.

【详解 1】原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

先求齐次方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=0$ 的通解:

$$\frac{dy}{y}=\frac{1}{2x}dx$$

积分得 $\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln c \Rightarrow y=c\sqrt{x}$

设 $y=c(x)\sqrt{x}$ 为非齐次方程的通解, 代入方程得

$$c'(x)\sqrt{x}+c(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}c(x)\sqrt{x}=\frac{1}{2}x^2$$

从而　$c'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$,

积分得　　　$c(x)=\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$,

于是非齐次方程的通解为

$$y=\sqrt{x}(\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C)=C\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$$

$$y\big|_{x=1}=\frac{6}{5}\quad\Rightarrow\quad C=1,$$

故所求通解为　$y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

【详解 2】原方程变形为 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=\frac{1}{2}x^2$,

由一阶线性方程通解公式得

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{1}{2}x^2e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+C\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx+C\right]=\sqrt{x}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+C\right]$$

$$y(1)=\frac{6}{5}\quad\Rightarrow\quad C=1,$$

从而所求的解为 $y=\sqrt{x}+\frac{1}{5}x^3$.

【评注】此题为求解一阶线性方程的常规题,相似的例题见《临考演习》P62**【16 题第一问】**.

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B|=$ $\underline{\quad\frac{1}{9}\quad}$.

【分析】利用伴随矩阵的性质及矩阵乘积的行列式性质求行列式的值.

【详解 1】　$ABA^*=2BA^*+E\quad\Leftrightarrow\quad ABA^*-2BA^*=E$,

$$\Leftrightarrow \quad (A-2E)BA^* = E,$$

$$\therefore \ |A-2E||B||A^*| = |E| = 1,$$

$$|B| = \frac{1}{|A-2E||A^*|} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} |A|^2} = \frac{1}{(-1)\cdot(-1)3^2} = \frac{1}{9}.$$

【详解 2】由 $A^* = |A|A^{-1}$，得

$$ABA^* = 2BA^* + E \quad \Rightarrow \quad AB|A|A^{-1} = 2B|A|A^{-1} + AA^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad |A|AB = 2|A|B + A$$

$$\Rightarrow \quad |A|(A-2E)B = A \quad \Rightarrow \quad |A|^3|A-2E||B| = |A|$$

$$\therefore \ |B| = \frac{1}{|A|^2|A-2E|} = \frac{1}{9}$$

【评注】此题是由矩阵方程及矩阵的运算法则求行列式值的一般题型，考点是伴随矩阵的性质和矩阵乘积的行列式. 相似的例题见《数学复习指南》P387-888【**例 2.18**】，只需将例中 A^*, A^{-1} 互换. 类似例子还可见《临考演习》P48【**题(6)**】和 P66【**题(6)**】.

二. 选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

（7）把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$，$\beta = \int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\, dt$，$\gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

（A）α, β, γ.　　　　（B）α, γ, β.

（C）β, α, γ.　　　　（D）β, γ, α.　　　　[B]

【分析】对与变限积分有关的极限问题，一般可利用洛必塔法则实现对变限积分的求导并结合无穷小代换求解.

【详解】 $\because \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt}{\int_0^x \cos t^2 dt}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} = 0,$$

即 $\gamma = o(\alpha)$.

又 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\beta}{\gamma} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}dt}{\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\tan x \cdot 2x}{\sin x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{\frac{1}{2}x} = 0$,

即 $\beta = o(\gamma)$.

从而按要求排列的顺序为 α、γ、β，故选（B）.

【评注】此题为比较由变限积分定义的无穷小阶的常规题,类似例题见《临考演习》P73**【题(7)】**.

（8）设 $f(x) = |x(1-x)|$，则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. [C]

【分析】求分段函数的极值点与拐点， 按要求只需讨论 $x=0$ 两方 $f'(x)$，$f''(x)$ 的符号.

【详解】 $f(x) = \begin{cases} -x(1-x), & -1 < x \le 0 \\ x(1-x), & 0 < x < 1 \end{cases}$,

$$f'(x) = \begin{cases} -1+2x, & -1 < x < 0 \\ 1-2x, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 0 \\ -2, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

从而 $-1 < x < 0$ 时，$f(x)$ 凹，$1 > x > 0$ 时，$f(x)$ 凸，于是 $(0,0)$ 为拐点.

又 $f(0) = 0$，$x \ne 0$、1 时，$f(x) > 0$，从而 $x = 0$ 为极小值点.

所以，$x=0$ 是极值点，$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，故选（C）.

【评注】此题是判定分段函数的极值点与拐点的常规题目，类似的题目见文登学校数学考研串讲班资料.

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于

（A）$\int_1^2 \ln^2 x dx$.　　　　（B）$2\int_1^2 \ln x dx$.

（C）$2\int_1^2 \ln(1+x)dx$.　　　　（D）$\int_1^2 \ln^2(1+x)dx$　　　　[B]

【分析】将原极限变型，使其对应一函数在一区间上的积分和式。作变换后，从四个选项中选出正确的.

【详解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})\right]^{\frac{2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+(1+\frac{n}{n})\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}$$

$$=2\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$\underline{\underline{1+x=t}}\ 2\int_1^2\ln t dt$$

$$=2\int_1^2\ln x dx$$

故选（B）.

【评注】此题是将无穷和式的极限化为定积分的题型，值得注意的是化为定积分后还必须作一变换，才能化为四选项之一. 类似例题见《数学复习指南》P36-37**【例 1.59】**.

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

（A）$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

（B）$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

（C）对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

（D）对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$. [C]

【分析】可借助于导数的定义及极限的性质讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近的局部性质.

【详解】由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}>0,$$

由极限的性质，$\exists\delta>0$，使 $|x|<\delta$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

即 $\delta>x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，

$-\delta<x<0$ 时，$f(x)<f(0)$，

故选（C）.

【评注】此题是利用导数的定义和极限的性质讨论抽象函数在某一点附近的性质. 完全类似的题目见《临考演习》P41**【题(13)】**.

（11）微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为

（A） $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.

（B） $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

（C） $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

（D） $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$ [A]

【分析】利用待定系数法确定二阶常系数线性非齐次方程特解的形式.

【详解】对应齐次方程 $y''+y=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+1=0,$$

特征根为 $\lambda=\pm i$，

对 $y''+y=x^2+1=e^0(x^2+1)$ 而言，因 0 不是特征根，从而其特解形式可设为

$$y_1^*=ax^2+bx+c$$

对 $y''+y=\sin x=I_m(e^{ix})$，因 i 为特征根，从而其特解形式可设为

$$y_2^* = x(A\sin x + B\cos x)$$

从而 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

$$y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$$

【评注】这是一道求二阶常系数线性非齐次方程特解的典型题，此题的考点是二阶常系数线性方程解的结构及非齐次方程特解的形式. 一般结论见《数学复习指南》P165**【表 6-4】**.

（12）设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \le 2y\right\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于

（A）$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$.

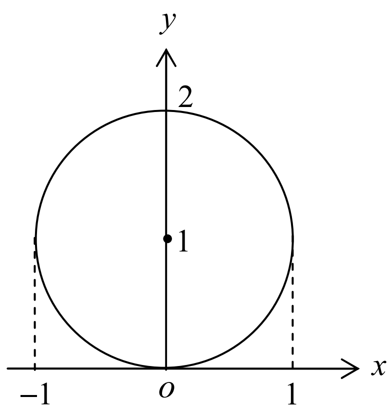
（B）$2\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$.

（C）$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta\cos\theta)dr$.

（D）$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta\cos\theta)rdr$　　　　[D]

【分析】将二重积分化为累次积分的方法是:先画出积分区域的示意图,再选择直角坐标系和极坐标系,并在两种坐标系下化为累次积分.

【详解】积分区域见图.



在直角坐标系下,

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(xy)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$$

故应排除（A）、（B）.

在极坐标系下，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$,

$$\iint\limits_D f(xy)dxdy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr,$$

故应选（D）.

【评注】此题是将二重积分化为累次积分的常规题,关键在于确定累次积分的积分限. 类似例题见《临考演习》P54**【题(7)】**.

(13)设 A 是3阶方阵, 将 A 的第1列与第2列交换得 B, 再把 B 的第2列加到第3列得 C, 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.　　[D]

【分析】根据矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系, 对题中给出的行(列)变换通过左(右)乘一相应的初等矩阵来实现.

【详解】由题意 $B=A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=B\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\therefore\ C=A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=AQ,$$

从而 $Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 故选(D).

【评注】此题的考点是初等变换与初等矩阵的关系, 抽象矩阵的行列初等变换可通过左、右乘相应的初等矩阵来实现. 类似的题目见《题型集粹与练习题集》P197【例 2.2】.

(14) 设 A,B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.　　[A]

【分析】将 A 写成行矩阵, 可讨论 A 列向量组的线性相关性. 将 B 写成列矩阵, 可讨论 B 行向量组的线性相关性.

【详解】设 $A=(a_{ij})_{l\times m}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 记

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

$$AB=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}A_1+\cdots+b_{m1}A_m & \cdots & b_{1n}A_1+\cdots+b_{mn}A_m \end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

由于$B\neq 0$，所以至少有一 $b_{ij}\neq 0\ (1\le i\le m, 1\le j\le n)$，

从而由（1）知，$b_{1j}A_1+b_{2j}A_2+\cdots+b_{ij}A_i+\cdots+b_{m1}A_m=0$，

于是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 线性相关.

又记 $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$，

则 $AB=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}B_1+a_{12}B_2+\cdots+a_{1m}B_m \\ a_{21}B_1+a_{22}B_2+\cdots+a_{2m}B_m \\ \cdots \\ a_{l1}B_1+a_{l2}B_2+\cdots+a_{lm}B_m \end{pmatrix}=0$

由于$A\neq 0$，则至少存在一 $a_{ij}\neq 0\ (1\le i\le l, 1\le j\le m)$，使

$$a_{i1}B_1+a_{i2}B_2+a_{ij}B_j+\cdots+a_{im}B_m=0,$$

从而 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 线性相关，

故应选（A）.

【评注】此题的考点是分块矩阵和向量组的线性相关性，此题也可以利用齐次线性方程组的理论求解. 类似例题见《数学复习指南》P411**【例 3.12】**.

三. 解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

【分析】此极限属于$\dfrac{0}{0}$型未定式. 可利用罗必塔法则，并结合无穷小代换求解.

【详解 1】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

【详解 2】 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

【评注】此题为求未定式极限的常见题型. 在求极限时, 要注意将罗必塔法则和无穷小代换结合, 以简化运算，类似的例题见《题型集粹与练习题集》P12【例 1.23】及文登考研数学辅导班例题.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上有定义，在区间$[0,2]$上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式;

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【分析】分段函数在分段点的可导性只能用导数定义讨论.

【详解】（Ⅰ）当$-2\le x<0$，即$0\le x+2<2$时,

$$f(x)=kf(x+2)=k(x+2)[(x+2)^2-4]=kx(x+2)(x+4).$$

（Ⅱ）由题设知 $f(0)=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)}{x}=8k.$$

令 $f'_-(0)=f'_+(0)$，得 $k=-\frac{1}{2}$.

即当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【评注】此题的考点是用定义讨论分段函数的可导性,完全类似的例题见《数学复习指南》P49**【例 2.3】**.

（17）（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$,

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

【分析】利用变量代换讨论变限积分定义的函数的周期性,利用求函数最值的方法讨论函数的值域.

【详解】（Ⅰ） $f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3\pi}{2}}|\sin t|dt$,

设 $t=u+\pi$，则有

$$f(x+\pi)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin(u+\pi)|du=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数.

(Ⅱ)因为 $|\sin x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且周期为 π，故只需在 $[0,\pi]$ 上讨论其值域. 因为

$$f'(x)=\left|\sin(x+\frac{\pi}{2})\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|,$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$，且

$$f(\frac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin t\,dt=\sqrt{2},$$

$$f(\frac{3\pi}{4})=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}}\sin t\,dt=2-\sqrt{2}\,,$$

又 $f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=1$，$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin t)\,dt=1$，

$\therefore$ $f(x)$ 的最小值是 $2-\sqrt{2}$，最大值是 $\sqrt{2}$，故 $f(x)$ 的值域是 $[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

【评注】此题的讨论分两部分:

(1)证明定积分等式,常用的方法是变量代换，类似的题目见《数学复习指南》P113**【例 4.31】**.

(2)求变上限积分的最值, 其方法与一般函数的最值相同, 类似的例题见《题型集粹与练习题集》P55**【例 4.7】**.

（18）（本题满分 12 分）

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t\,(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

【分析】用定积分表示旋转体的体积和侧面积，二者及截面积都是 t 的函数,然后计算它们之间的关系.

【详解】（Ⅰ）$S(t)=\int_0^t 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx\,,$$

$$V(t)=\pi\int_0^t y^2dx=\pi\int_0^t\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx\,,$$

$$\therefore\ \frac{S(t)}{V(t)}=2\,.$$

（Ⅱ）$F(t)=\pi y^2\Big|_{x=t}=\pi\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$，

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\pi\int_0^t\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2dx}{\pi\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}{2\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}=1$$

【评注】在 t 固定时，此题属于利用定积分表示旋转体的体积和侧面积的题型，考点是定积分几何应用的公式和罗必塔求与变限积分有关的极限问题. 具体作法见《数学复习指南》P196-198.

（19）（本题满分 12 分）

设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

【分析】文字不等式可以借助于函数不等式的证明方法来证明，常用函数不等式的证明方法主要有单调性、极值和最值法等.

【详证 1】设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

所以当 $x>e$ 时，$\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 单调减小，从而当 $e<x<e^2$ 时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

即当 $e<x<e^2$ 时，$\varphi(x)$ 单调增加.

因此，当 $e<a<b<e^2$ 时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即

$$\ln^2 b-\frac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\frac{4}{e^2}a$$

故 $$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

【详证 2】设$\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}(x-a)$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{e^2}$$

$$\varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2},$$

$\therefore\ x>e$时，$\varphi''(x)<0\quad\Rightarrow\varphi'(x)\searrow$ ，从而当$e<x<e^2$时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0,$$

$\Rightarrow e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

$\Rightarrow e<a<b<e^2$时，$\varphi(x)>\varphi(a)=0$。令$x=b$有$\varphi(b)>0$

即
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a).$$

【详证 3】证 对函数$\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),\ \ a<\xi<b.$$

设$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，

当$t>e$时，$\varphi'(t)<0$，所以$\varphi(t)$单调减小，

从而$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2},$$

故
$$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$$

【评注】此题是文字不等式的证明题型. 由于不能直接利用中值定理证明，所以常用的方法是将文字不等式化为函数不等式，然后借助函数不等式的证明方法加以证明. 类似的例题见《题型集粹与练习题集》P87**【例 6. 3】**.

（20）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减小滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下来.

现有一质量为$9000kg$的飞机，着陆时的水平速度为$700km/h$. 经测试，减速伞打开后，飞机所

受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k=6.0\times10^{6}$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

【分析】本题属物理应用. 已知加速度或力求运动方程是质点运动学中一类重要的计算, 可利用牛顿第二定律, 建立微分方程, 再求解.

【详解1】由题设, 飞机的质量 $m=9000kg$, 着陆时的水平速度 $v_0=700km/h$. 从飞机接触跑道开始记时, 设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$, 速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律, 得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

又 $$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx},$$

$$\therefore\ dx=-\frac{m}{k}dv,$$

积分得 $$x(t)=-\frac{m}{k}v+C,$$

由于 $v(0)=v_0, x(0)=0$, 故得 $C=\frac{m}{k}v_0$, 从而

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当 $v(t)\to0$ 时,

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^{6}}=1.05\,(km).$$

所以, 飞机滑行的最长距离为 $1.05\,km$.

【详解2】根据牛顿第二定律, 得

$$m\frac{dv}{dt}=-kv.$$

所以 $$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt,$$

两边积分得 $$v=Ce^{-\frac{k}{m}t},$$

代入初始条件 $v\big|_{t=0}=v_0$, 得 $C=v_0$,

$$\therefore\ v(t)=v_0e^{-\frac{k}{m}t},$$

故飞机滑行的最长距离为

$$x=\int_0^{+\infty}v(t)dt=-\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{mv_0}{k}=1.05\,(km).$$

【详解3】根据牛顿第二定律,得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0,$$

其特征方程为　　$r^2+\frac{k}{m}r=0$,

解得 $r_1=0$，$r_2=-\frac{k}{m}$,

故　　　　　$x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$,

由 $x(0)=0$，$v(0)=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\left.-\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right|_{t=0}=v_0$，得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$,

$$\therefore\ x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

当 $t\to+\infty$ 时,

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^6}=1.05\,(km).$$

所以,飞机滑行的最长距离为 $1.05\,km$.

【评注】此题的考点是由物理问题建立微分方程,并进一步求解. 完全类似的例题见《数学复习指南》P174**【例 6.24】**、《题型集粹与练习题集》P182**【例 12.19】**.

（21）（本题满分 10 分）

设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【分析】利用复合函数求偏导和混合偏导的方法直接计算.

【详解】　$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x[f_{11}''\cdot(-2y)+f_{12}''\cdot xe^{xy}]+e^{xy}f_2'+xye^{xy}f_2'+ye^{xy}[f_{21}''\cdot(-2y)+f_{22}''\cdot xe^{xy}]$$

$$=-4xyf_{11}''+2(x^2-y^2)e^{xy}f_{12}''++xye^{2xy}f_{22}''+e^{xy}(1+xy)f_2'.$$

【评注】此题属求抽象复合函数高阶偏导数的常规题型. 类似的例题见《数学复习指南》P269

【例 10.18】.

（22）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

【分析】此题为求含参数齐次线性方程组的解. 由系数行列式为 0 确定参数的取值, 进而求方程组的非零解.

【详解 1】对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2a&a&0&0\\-3a&0&a&0\\-4a&0&0&a\end{pmatrix}=B$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<4$，故方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0.$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,0)^T,\ \eta_2=(-1,0,1,0)^T,\ \eta_3=(-1,0,0,1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3，\text{其中 } k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数.}$$

当 $a\neq0$ 时，

$$B\to\begin{pmatrix}1+a&1&1&1\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+10&0&0&0\\-2&1&0&0\\-3&0&1&0\\-4&0&0&1\end{pmatrix}$$

当 $a=-10$ 时，$r(A)=3<4$，故方程组也有非零解，其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\-4x_1+x_4=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为

$$\eta=(1,2,3,4)^T,$$

所以所求方程组的通解为

$$x = k\eta\text{，其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

【详解 2】方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4+a \end{vmatrix} = (a+10)a^3 .$$

当$|A| = 0$，即$a = 0$或$a = -10$时，方程组有非零解.

当$a = 0$时，对系数矩阵A作初等行变换，有

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 .$$

其基础解系为

$$\eta_1 = (-1, 1, 0, 0)^T,\ \eta_2 = (-1, 0, 1, 0)^T,\ \eta_3 = (-1, 0, 0, 1)^T,$$

于是所求方程组的通解为

$$x = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3\text{，其中 } k_1, k_2, k_3 \text{ 为任意常数.}$$

当$a = -10$时，对A作初等行变换，有

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -8 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & -10 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & -10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1, \\ x_3 = 3x_1, \\ x_4 = 4x_1, \end{cases}$$

其基础解系为$\eta = (1, 2, 3, 4)^T$，

所以所求方程组的通解为$x = k\eta$，其中k为任意常数

【评注】解此题的方法是先根据齐次方程有非零解的条件确定方程组中的参数,再对求得的参数对应的方程组求解. 类似的例题见《数学复习指南》P435**【例 4.4】.**

（23）（本题满分 9 分）

设矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

【分析】由矩阵特征根的定义确定a的值，由线性无关特征向量的个数与$\lambda E-A$秩之间的关系确定A是否可对角化.

【详解】A的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若$\lambda=2$是特征方程的二重根，则有$2^2-16+18+3a=0$，解得$a=-2$.

当$a=-2$时，A的特征值为 2, 2, 6，矩阵$2E-A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$的秩为 1,

故$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量有两个，从而A可相似对角化.

若$\lambda=2$不是特征方程的二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$为完全平方,

从而$18+3a=16$，解得$a=-\frac{2}{3}$.

当$a=-\frac{2}{3}$时，A的特征值为 2, 4, 4，矩阵$2E-A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$的秩为 2,

故$\lambda=4$对应的线性无关的特征向量只有一个，从而A不可相似对角化.

【评注】此题的考点是由特征根及重数的定义确定a的值，对a的取值讨论对应矩阵的特征根及对应$\lambda E-A$的秩，进而由$\lambda E-A$的秩与线性无关特征向量的个数关系确定A是否可相似对角化. 类似的例题见《数学复习指南》P463**【例 5.13】.**