绝密★启用前

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三)试卷答案和评分参考

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ __1__, $b=$ __-4__.

(2) 函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y]=x+g(y)$确定,其中函数$g(y)$可微,且$g(y)\neq 0$,则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ $\underline{-\dfrac{g'(v)}{[g(v)]^2}}$.

(3) 设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\,dx=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}}$.

(4) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩为 __2__.

(5) 设随机变量X服从参数为λ的指数分布,则$P\{X>\sqrt{DX}\}=$ $\underline{\dfrac{1}{e}}$.

(6) 设总体X服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$,总体Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$和$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$分别是来自总体X和Y的简单随机样本,则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\sigma^2}.$$

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满 分32分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(2,3)$ 【 A 】

(8) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

(A) $x=0$必是$g(x)$的第一类间断点.

(B) $x=0$必是$g(x)$的第二类间断点.

(C) $x=0$必是$g(x)$的连续点.

(D) $g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关. 【 D 】

(9) 设$f(x)=|x(1-x)|$,则

(A) $x=0$是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$不是曲线$y=f(x)$的拐点.

(B) $x=0$不是$f(x)$的极值点,但$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(C) $x=0$是$f(x)$的极值点,且$(0,0)$是曲线$y=f(x)$的拐点.

(D) $x=0$不是$f(x)$的极值点,$(0,0)$也不是曲线$y=f(x)$的拐点. 【 C 】

(10) 设有以下命题:

① 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

② 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$收敛.

③ 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

④ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛.

则以上命题中正确的是

(A) ①②. (B) ②③. (C) ③④. (D) ①④. 【 B 】

(11) 设$f'(x)$在$[a,b]$上连续,且$f'(a)>0$,$f'(b)<0$,则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点$x_0\in(a,b)$,使得$f(x_0)=0$. 【 D 】

(12) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$等价,则必有

(A) 当$|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=a$.

(B) 当$|\boldsymbol{A}|=a\ (a\neq0)$时,$|\boldsymbol{B}|=-a$.

(C) 当$|\boldsymbol{A}|\neq0$时,$|\boldsymbol{B}|=0$.

(D) 当$|\boldsymbol{A}|=0$时,$|\boldsymbol{B}|=0$. 【 D 】

(13) 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$,若$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的互不相等的解,则对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量. 【 B 】

(14) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$,对给定的$\alpha\in(0,1)$,数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若$P\{|X|<x\}=\alpha$,则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. 【 C 】

三、解答题(本题共9小题,满分94分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分8分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$ ……2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3}$ ……4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{6x^2}$ ……6 分

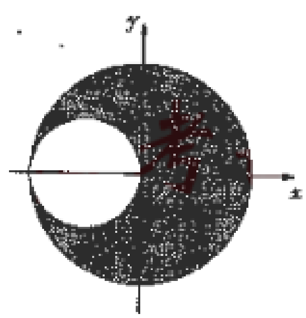
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{3x}$

$=\dfrac{4}{3}$. ……8 分

(16)(本题满分8分)

求 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).

解法1 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{大圆}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_{小圆}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma$. ……2 分



$\iint\limits_{D_{大圆}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{D_大}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_大}y\,\mathrm{d}\sigma$ (据对称性)

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\,\mathrm{d}r+0=\dfrac{16}{3}\pi$. ……4 分

$\iint\limits_{D_{小圆}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{D_小}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_小}y\,\mathrm{d}\sigma$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\,\mathrm{d}r+0$

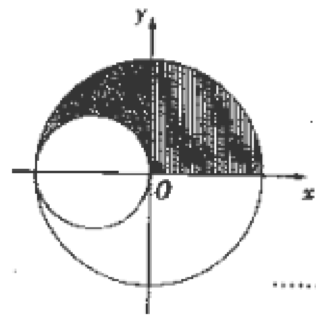
3

$$= \frac{32}{9}.$$ ……7 分

所以 $$\iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma = \frac{16}{9}(3\pi-2).$$ ……8 分

解法2 由积分区域对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma = 0.$$ ……1 分



$$原式 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma + 0$$

$$= 2\Big[\iint\limits_{D_{上1}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_{上2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\Big]$$ ……2 分

$$= 2\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^2 r^2\mathrm{d}r\Big]$$ ……5 分

$$= 2\Big[\frac{4}{3}\pi + (\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{9})\Big]$$

$$= \frac{16}{9}(3\pi-2).$$ ……8 分

〔注〕: $\iint\limits_{D_{上1}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 定限 1 分,计算 1 分.

$\iint\limits_{D_{上2}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ 定限 2 分,计算 2 分.

(17)(本题满分 8 分)

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b),$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

证明: $$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $F(x)=f(x)-g(x)$, $G(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$,

由题设知

$$G(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b],$$

$$G(a)=G(b)=0,\ G'(x)=F(x).$$ ……2 分

从而

$$\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x = \int_a^b x\mathrm{d}G(x)$$

4

$$= xG(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x.$$ ……4 分

由于 $G(x) \geqslant 0,\ x \in [a,b]$，故有

$$-\int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$ ……6 分

即 $$\int_a^b xF(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

因此 $$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\,\mathrm{d}x.$$ ……8 分

(18)（本题满分 9 分）

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$，其中价格 $P \in (0, 20)$，Q 为需求量.

（Ⅰ）求需求量对价格的弹性 $E_d (E_d > 0)$；

（Ⅱ）推导 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q(1 - E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

解 （Ⅰ）$E_d = \left|\frac{P}{Q}Q'\right| = \frac{P}{20 - P}$. ……2 分

（Ⅱ）由 $R = PQ$，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} = Q + PQ'$$

$$= Q\left(1 + \frac{P}{Q}Q'\right)$$

$$= Q(1 - E_d).$$ ……4 分

又由 $E_d = \frac{P}{20 - P} = 1$，得 $P = 10$. ……5 分

当 $10 < P < 20$ 时，$E_d > 1$，于是 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P} < 0$. ……7 分

故当 $10 < P < 20$ 时，降低价格反而使收益增加. ……9 分

(19)（本题满分 9 分）

设级数

$$\frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

（Ⅰ）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程；

（Ⅱ）$S(x)$ 的表达式.

解 （Ⅰ）$S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$，

易见 $S(0)=0$， ……1 分

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

$$=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)$$ ……2 分

$$=x\left[\frac{x^2}{2}+S(x)\right].$$

因此 $S(x)$ 是初值问题

$$y'=xy+\frac{x^3}{2},\ y(0)=0$$

的解. ……4 分

（Ⅱ）方程

$$y'=xy+\frac{x^3}{2}$$

的通解为

$$y=e^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}},$$ ……7 分

由初始条件 $y(0)=0$，求得 $C=1$. ……8 分

故 $y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数 $S(x)=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$. ……9 分

(20)（本题满分 13 分）

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$. 试讨论当 a,b 为何值时，

（Ⅰ）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（Ⅱ）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

（Ⅲ）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不惟一，并求出表示式.

解 设有数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\beta. \qquad (*)$$ ……1 分

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 对矩阵 $(A\quad\beta)$ 施以初等行变换，有

6

$$(A\quad\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\2&a+2&-b-2&\vdots&3\\0&-3a&a+2b&\vdots&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\0&a&-b&\vdots&1\\0&0&a-b&\vdots&0\end{pmatrix}.$$ ……3 分

（Ⅰ）当 $a=0$，b 为任意常数时，有

$$(A\quad\beta)\to\begin{pmatrix}1&1&-1&\vdots&1\\0&0&-b&\vdots&1\\0&0&0&\vdots&-1\end{pmatrix}.$$

可知 $r(A)\neq r(A\quad\beta)$，故方程组（＊）无解，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. ……5 分

（Ⅱ）当 $a\neq0$，且 $a\neq b$ 时，$r(A)=r(A\quad\beta)=3$，故方程组（＊）有惟一解

$$k_1=1-\frac{1}{a},\ k_2=\frac{1}{a},\ k_3=0,$$

则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 惟一地线性表示，其表示式为

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2.$$ ……7 分

（Ⅲ）当 $a=b\neq0$ 时，对 $(A\quad\beta)$ 施以初等行变换，有

$$(A\quad\beta)\to\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\vdots&\frac{1}{a}\\0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}.$$ ……9 分

可知 $r(A)=r(A\quad\beta)=2$，故方程组（＊）有无穷多解，其全部解为

$$k_1=1-\frac{1}{a},\ k_2=(\frac{1}{a}+c),\ k_3=c,$$ 其中 c 为任意常数.

β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不惟一，其表示式为 ……11 分

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+(\frac{1}{a}+c)\alpha_2+c\alpha_3.$$ ……13 分

（21）（本题满分 13 分）

设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

（Ⅰ）求 A 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 （Ⅰ）1° 当 $b \neq 0$ 时，

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -b & \cdots & -b \\ -b & \lambda - 1 & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$= [\lambda - 1 - (n-1)b][\lambda - (1-b)]^{n-1}. \qquad \cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$，$\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$.

对于 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$，设 A 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量为 ξ_1，则

$$\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xi_1 = [1 + (n-1)b]\xi_1,$$

解得 $\xi_1 = (1,1,\cdots,1)^T$，所以全部特征向量为

$$k\xi_1 = k(1,1,\cdots,1)^T \quad (k \text{ 为任意非零常数}). \qquad \cdots\cdots 5 \text{ 分}$$

对于 $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$，解齐次线性方程组 $[(1-b)E - A]x = \mathbf{0}$，由

$$(1-b)E - A = \begin{pmatrix} -b & -b & \cdots & -b \\ -b & -b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & -b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

解得基础解系

$$\xi_2 = (1, -1, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$\xi_3 = (1, 0, -1, \cdots, 0)^T,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\xi_n = (1, 0, 0, \cdots, -1)^T.$$

故全部特征向量为

$$k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + \cdots + k_n\xi_n \quad (k_2, \cdots, k_n \text{ 是不全为零的常数}). \qquad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

2° 当 $b = 0$ 时，特征值 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$，任意非零列向量均为特征向量. ……9 分

（Ⅱ）1° 当 $b \neq 0$ 时，A 有 n 个线性无关的特征向量，令 $P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{1 + (n-1)b, 1 - b, \cdots, 1 - b\}. \qquad \cdots\cdots 11 \text{ 分}$$

2° 当 $b = 0$ 时，$A = E$，对任意可逆矩阵 P，均有

$$P^{-1}AP = E. \qquad \cdots\cdots 13 \text{ 分}$$

[注]：$\xi_1=(1,1,\cdots,1)^T$ 也可由求解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)x=0$ 得出.

(22)（本题满分 13 分）

设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$，令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\0, & A\text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求：

（Ⅰ）二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

（Ⅱ）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

（Ⅲ）$Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

解　（Ⅰ）$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{12}$，$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A\mid B)}=\frac{1}{6}$，　　……2 分

则　$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$，

$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})$

$$=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=\frac{2}{3},$$

（或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$），　　……6 分

即 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

（Ⅱ）方法 1

$EX=P(A)=\frac{1}{4}$，$EY=P(B)=\frac{1}{6}$，$E(XY)=\frac{1}{12}$，

则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，

9