绝密★启用前

2004年全国硕士研究生入学统一考试
数学(四)试卷答案和评分参考

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上.)

(1) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$ __1__, $b=$ __-4__.

(2) 设$y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ $\underline{\dfrac{e-1}{e^2+1}}$.

(3) 设$f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 则$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)dx=$ $\underline{-\dfrac{1}{2}}$.

(4) 设$A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$,$B=P^{-1}AP$,其中$P$为三阶可逆矩阵,则$B^{2004}-2A^2=$

$\underline{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$.

(5) 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是实正交矩阵,且$a_{11}=1$,$b=(1,0,0)^T$,则线性方程组$Ax=b$的解是 $\underline{(1,0,0)^T}$.

(6) 设随机变量X服从参数为λ的指数分布,则$P\{X>\sqrt{DX}\}=$ $\underline{\dfrac{1}{e}}$.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1,0)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,2)$　(D) $(2,3)$　【 A 】

(8) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关. 【 D 】

(9) 设 $f(x)=|x(1-x)|$,则

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点,且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 【 C 】

(10) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$,则

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,但不一定满足 $F'(x)=f(x)$. 【 B 】

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$,则下列结论中错误的是

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$,使得 $f(x_0)=0$. 【 D 】

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价,则必有

(A) 当 $|A|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|B|=a$.

(B) 当 $|A|=a\ (a\neq 0)$ 时,$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时,$|B|=0$.

(D) 当 $|A|=0$ 时,$|B|=0$. 【 D 】

(13) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$,对给定的 $\alpha\in(0,1)$,数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$,若 $P\{|X|<x\}=\alpha$,则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$. 【 B 】

(14) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 独立同分布,且其方差为 $\sigma^2>0$. 令随机变量 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,则

(A) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$. (B) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

(C) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$. (D) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$. 【 C 】

2

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4} \qquad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{4}\sin 4x}{2x^3} \qquad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2} \qquad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

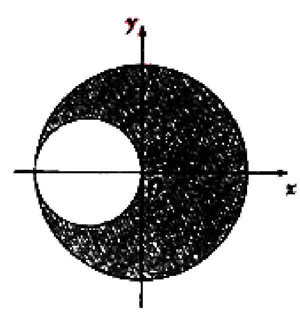
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$$

$$=\frac{4}{3}. \qquad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

(16)(本题满分 8 分)

求 $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图).

解法 1 $\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{大圆}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_{小圆}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma.$ ……2 分



$\iint\limits_{D_{大圆}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{D_大}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_大}y\mathrm{d}\sigma$ (据对称性)

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+0=\dfrac{16}{3}\pi.$ ……4 分

$\iint\limits_{D_{小圆}}(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$

$=\iint\limits_{D_小}(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_小}y\mathrm{d}\sigma$

3

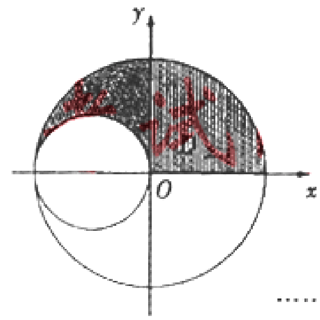
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r+0$$

$$=\frac{32}{9},$$ ……7 分

所以 $$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$ ……8 分

解法 2　由积分区域对称性和被积函数的奇偶性

$$\iint_D y\mathrm{d}\sigma=0.$$ ……1 分



$$原式=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+0$$

$$=2\left[\iint_{D_{\text{上}1}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_{\text{上}2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma\right]$$ ……2 分

$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-2\cos\theta}^{2}r^2\mathrm{d}r\right]$$ ……5 分

$$=2\left[\frac{4}{3}\pi+\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{9}\right)\right]$$

$$=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$ ……8 分

[注]：$\iint_{D_{\text{上}1}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$　定限 1 分，计算 1 分.

$\iint_{D_{\text{上}2}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$　定限 2 分，计算 2 分.

(17)（本题满分 8 分）

设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足

$$f'_u(u,v)+f'_v(u,v)=uv.$$

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

解　$y'=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f'_u(x,x)+e^{-2x}f'_v(x,x)$ ……3 分

$$=-2y+x^2e^{-2x},$$

因此，所求的一阶微分方程为

$$y'+2y=x^2e^{-2x}.$$ ……4 分

解得 $$y=e^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int x^2e^{-2x}e^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$ ……6 分

$$=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}（C 为任意常数）.$$ ……8 分

4

(18)(本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$,其中价格 $P \in (0, 20)$,Q 为需求量.

(Ⅰ) 求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d > 0)$;

(Ⅱ) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$(其中 R 为收益),并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时,降低价格反而使收益增加.

解 (Ⅰ) $E_d = \left|\frac{P}{Q}Q'\right| = \frac{P}{20 - P}$. ……2 分

(Ⅱ) 由 $R = PQ$,得

$$\frac{dR}{dP} = Q + PQ'$$

$$= Q(1 + \frac{P}{Q}Q')$$

$$= Q(1 - E_d).$$ ……4 分

又由 $E_d = \frac{P}{20 - P} = 1$,得 $P = 10$. ……5 分

当 $10 < P < 20$ 时,$E_d > 1$,于是 $\frac{dR}{dP} < 0$. ……7 分

故当 $10 < P < 20$ 时,降低价格反而使收益增加. ……9 分

(19)(本题满分 9 分)

设 $F(x) = \begin{cases} e^{2x}, & x \leq 0, \\ e^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y = F(x)$ 之间的面积. 对任何 $t > 0$,$S_1(t)$ 表示矩形 $-t \leq x \leq t, 0 \leq y \leq F(t)$ 的面积. 求

(Ⅰ) $S(t) = S - S_1(t)$ 的表达式;

(Ⅱ) $S(t)$ 的最小值.

解 (Ⅰ) $S = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} = 1$, ……2 分

$$S_1(t) = 2te^{-2t},$$

因此 $S(t) = 1 - 2te^{-2t}$, $t \in (0, +\infty)$. ……4 分

(Ⅱ) 由于

$$S'(t) = -2(1 - 2t)e^{-2t},$$

故 $S(t)$ 的唯一驻点为 $t = \frac{1}{2}$. ……7 分

5

又

$$S''(t)=8(1-t)e^{-2t},$$

$$S''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{e}>0.$$

所以 $S\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{e}$ 为极小值，它也是最小值. ……9 分

(20)（本题满分 13 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1,\end{cases}$$

已知$(1,-1,1,-1)^T$是该方程组的一个解. 试求

（Ⅰ）方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

（Ⅱ）该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解 将$(1,-1,1,-1,)^T$代人方程组，得 $\lambda=\mu$. 对方程组的增广矩阵施以初等行变换，得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{array}\right).$$ ……2 分

（Ⅰ）当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，有

$$\bar{A}\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

因 $r(\bar{A})=r(A)=3<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\xi=(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T+k(-2,1,-1,2)^T,$$ ……5 分

其中 k 为任意常数.

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有

6